Trygonometria

Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Funkcje trygonometryczne są głównymi pojęciami trygonometrii. Istnieje sześć funkcji trygonometrycznych:

- sinus (czyt. sinus), symbol: sin
- cosinus (czyt. kosinus), symbol: cos
- tangens (czyt. tangens), symbol: tg, tan
- cotangens (czyt. kotangens), symbol: ctg, cot, ctn
- secans (czyt. sekans), symbol: sec,
- cosecans (czyt. kosekans), symbol: cosec, csc

Argumentami funkcji trygonometrycznych mogą być:

- kąt skierowany
- liczba rzeczywista

DEFINICJA
funkcji trygonometrycznych dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
Sinusem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej na przeciw kąta α do przeciwprostokątnej

Cosinusem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie α do przeciwprostokątnej

Tangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej na przeciw kąta α do przyprostokątnej leżącej przy kącie α

Cotangensem kąta ostrego α nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie α do przyprostokątnej leżącej na przeciw kąta α

$$ctg\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{lub} \quad ctg\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

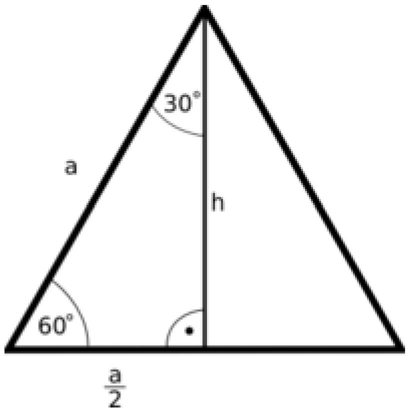
Secansem kąta ostrego α nazywamy stosunek przeciwprostokątnej do przyprostokątnej leżącej przy kącie α

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} \quad \text{lub} \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Cosecansem kąta ostrego α nazywamy stosunek przeciwprostokątnej do przyprostokątnej leżącej na przeciw kąta α

$$\csc\alpha = \frac{c}{a} \quad \text{lub} \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°



Wyznaczyć wartości funkcji tryg. dla kątów o mierze 30° i 60° można za pomocą trójkąta równobocznego, wykorzystując do tego jego własności.

$$\sin 30 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg30 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A teraz korzystając z własności kwadratu obliczymy wartości funkcji trygonometrycznej dla kąta o mierze 45°.

Z powyższych wyliczeń można stworzyć tabelkę, której będziesz musiał nauczyć się na pamięć.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 30°, 45° i 60°

×	30°	45°	60°

sin	$\frac{1}{2}$		
cos			$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Miara łukowa kąta

Narysujmy okrąg o promieniu *r*, a na nim zaznaczmy łuk *L*, dla którego kąt środkowy oparty o ten łuk będzie wynosił 60°. Znajdźmy wzór na długość tego łuku.

Intuicyjnie długość łuku do obwodu okręgu jest równa mierze kąta w stopniach do 360°:

$$\frac{L}{\mathrm{Ob}} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$$

ponieważ Ob = 2π*r*, otrzymujemy:

$$\frac{L}{2\pi r} = \frac{60^\circ}{360^\circ}$$

zatem:

$$L = \frac{2\pi \cdot 60^\circ r}{360^\circ} = \left(\frac{2\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ}\right) r$$

Jak łatwo zauważyć wartość $\left(\frac{2\pi 60^\circ}{360^\circ}\right)$ nie zależy od promienia naszego okręgu, tylko od kąta, który tworzy nasz łuk. Wartość ta nazywana jest **miarą łukową kąta** dla kąta 60°. W ogólności wzór na długość łuku wyznaczonego przez kąt $\varphi_\circ$ (wyznaczonego w stopniach) przybierze postać:

$$L = \left(\frac{2\pi\varphi_\circ}{360^\circ}\right) r = \left(\frac{\pi\varphi_\circ}{180^\circ}\right) r$$

Tak jak długość nie musi wyrażać się w metrach, tak też kąt nie musi wyrażać się w stopniach. Możemy wykorzystać inną jednostkę kąta, jakim jest radian. Wtedy wartość kąta jest wyrażana w tzw. **mierze łukowej**. Załóżmy, że kąt $\varphi_\circ$ jest wyrażony w stopniach, φ w radianach, wówczas wartości tych kątów wiąże zależność:

$$\varphi = \frac{\pi\varphi_\circ}{180^\circ}$$

Jednostką miary łukowej jest radian, który w skrócie zapisywany jest przez *rad*. Często przy podawaniu kąta wyrażonego w mierze łukowej pomija się jednostkę np. zamiast $\frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad}$ pisze się po prostu $\frac{\pi}{2}$.

Powróćmy znowu do wzoru na długość łuku l, jednak tym razem jednak załóżmy, że kąt na którym jest oparty łuk jest wyrażony w radianach i wynosi α. Wówczas wykorzystując zależność $\alpha = \frac{2\pi \cdot \alpha_\circ}{180^\circ}$ otrzymujemy zależność:

$$L = \frac{2\pi \cdot \alpha_\circ}{180^\circ} r = \alpha r$$

dzieląc obustronnie przez *r* otrzymujemy:

$$\frac{L}{r} = \alpha$$

DEFINICJA
Miarą łukową kąta nazywamy stosunek długości łuku do długości promienia. Jest ona równa kątowi α, który wyznacza ten łuk:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

Jednostką miary łukowej jest **radian**.

Ten drugi wzór jest o wiele łatwiejszy do zapamiętania.

Zauważmy, że miara kąta pełnego wyrażonego w stopniach wynosi 360°, a w radianach $\frac{\pi \cdot 360^\circ}{180^\circ}\ \mathrm{rad} = 2\pi\ \mathrm{rad}$. Zatem:

-

- $\pi \text{ rad} = 180°$
- $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90°$
-
- $\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45°$
-

Aby zamienić stopnie na radiany możemy wykorzystać wcześniej wzór:

(który był przedstawiony wcześniej, lecz w nieco innej postaci).
Odwrotnie, aby zamienić radiany na stopnie wykorzystujemy wzór:

Możemy go o trzymać przekształcając poprzedni wzór.
Przykład 1 Zamieńmy miarę stopniową na miarę łukową

a)
b)
c)

Wówczas możemy to zrobić na dwa sposoby:

a) I sposób za pomocą proporcji:

2π - $360°$
x -

czyli:

II sposób, wykorzystując wzór:

b)
c)

Przykład 2 Zamieńmy miarę łukową na miarę stopniową

a)
b)
b)

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, możemy to zrobić na dwa sposoby:

a) I sposób za pomocą proporcji:

2π - $360°$

- *x*

zatem:

II sposób, wykorzystując wzór:

b)

c)

Funkcje trygonometryczne kąta dowolnego

Miara kąta skierowanego na płaszczyźnie zorientowanej

DEFINICJA
Kąt skierowany - jest to uporządkowana para półprostych o wspólnym początku; pierwsza półprosta - *ramię początkowe*, druga półprosta - *ramię końcowe*.

Przykład kąta skierowanego

Ramieniem początkowym kąta α jest półprosta wyróżniona na **niebiesko**, a ramieniem końcowym półprosta koloru **czerwonego**.

DEFINICJA
Płaszczyzna zorientowana - jest to taka płaszczyzna na której określono bieg dodatni dla każdego okręgu.

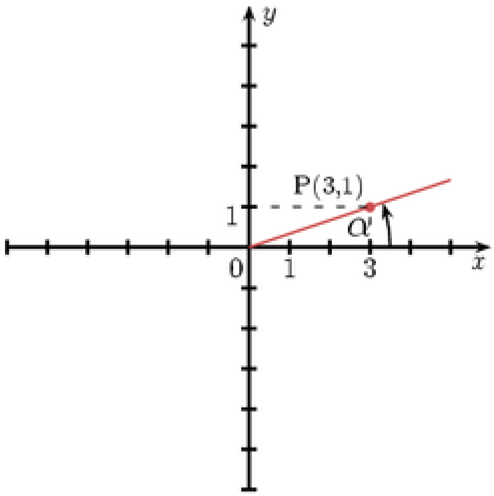
Przykład płaszczyzna zorientowana 1: Układ współrzędnych zorientowany dodatnio.	Przykład płaszczyzna zorientowana 2: Układ współrzędnych zorientowany ujemnie.

Kątowi skierowanemu na płaszczyźnie zorientowanej przyporządkowujemy ten kąt nieskierowany AOB (wypukły lub wklęsły) w którym leży łuk o początku w punkcie L i końcu w punkcie K, mający zwrot dodatni.

Funkcje trygonometryczne kąta skierowanego

DEFINICJA
{{{1}}}

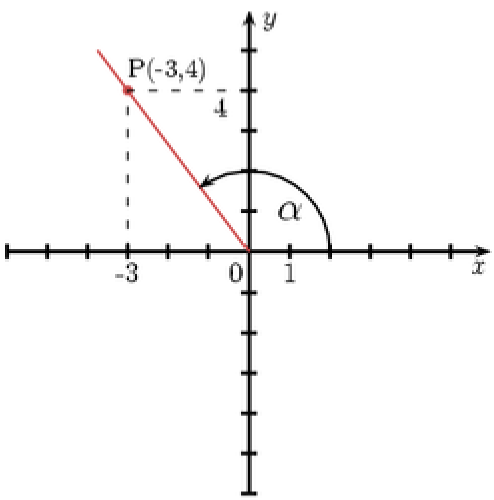
Przykład 1.



Niech ramię początkowe kąta α pokrywa się z dodatnią półosią *OX*, a ramię końcowe przechodzi przez punkt *P*(3,1). Wyznaczmy wartości funkcji sinus, cosinus, tangens i cotangens dla tego kąta. Ponieważ wartości funkcji trygonometrycznych nie zależą od wyboru punktu należącego do końcowego ramienia kąta, zatem możemy wykorzystać do tego współrzędne punktu *P*(3,1):

Mówimy, że kąt jest w **położeniu standardowym**, jeśli kąt został umieszczony tak w układzie współrzędnych, że jego **ramię początkowe** pokrywa się z **dodatnią osią *OX***.

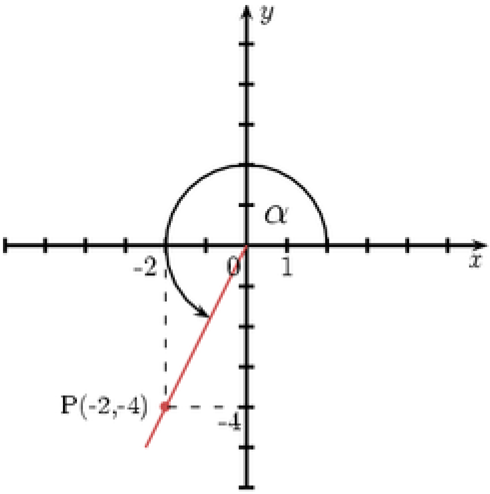
Przykład 2.



Kąt α znajduje się w położeniu standardowym. Końcowe ramię przechodzi przez punkt *P*(− 3,4). Wyznaczmy sinα, cosα, *tg*α, *ctg*α.

-
-

Przykład 3.



Kąt α znajduje się w położeniu standardowym. Końcowe ramię przechodzi przez punkt *P*(− 2, − 4). Obliczmy sinα, cosα, *tg*α, *ctg*α.

-
-
-
- $$ctg\alpha = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Własności funkcji trygonometrycznych

Znak funkcji trygonometrycznej

Funkcja	I	II	III	IV
*sin*α	+	+	-	-
*cos*α	+	-	-	+
*tg*α	+	-	+	-
*ctg*α	+	-	+	-

Czy wiesz, że...
Powyższe znaki funkcji trygonometrycznych można nauczyć się stosując prosty wierszyk: "W pierwszej wszystkie są dodatnie, w drugiej tylko sinus, w trzeciej tangens i cotangens, a w czwartej cosinus".

Parzystość i nieparzystość

Funkcja cosα jest parzysta, czyli zachodzi:

$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

Natomiast funkcje sinα, *tg*α i *ctg*α są nieparzyste, czyli:

$\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$
$tg\alpha = -tg(-\alpha)$
$ctg\alpha = -ctg(-\alpha)$

Okresowość

Dla funkcji trygonometryczny sinα, cosα, *tg*α, *ctg*α, gdzie α jest dowolnym kątem, a *k* dowolną liczbą całkowitą, zachodzi:

$$sin(k \cdot 360^{\circ} + \alpha) = \sin\alpha$$
$$cos(k \cdot 360^{\circ} + \alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(k \cdot 180^{\circ} + \alpha) = tg\alpha$$
$$ctg(k \cdot 180^{\circ} + \alpha) = ctg\alpha$$

Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

Wykresy funkcji trygonometrycznych

Wykres funkcji sinus nazywa się **sinusoidą**, funkcji cosinus **cosinusoidą**, funkcji tangens **tangensoidą**, a funkcji cotangens **cotangensoidą**.
Na podstawie wykresu poszczególnych funkcji trygonometrycznych można oszacować cechy tej funkcji:

Sinusoida

- $D_f = \mathbb{R}$
- $ZW_f = \langle -1; 1 \rangle$
- $T = 2\pi$
- $f(x) = 0$ dla $x = k\pi$ gdzie
- nieparzystość
- okresowość

Cosinusoida

- $D_f = \mathbb{R}$
- $ZW_f = \langle -1; 1 \rangle$
- $T = 2\pi$
- $f(x) = 0$ dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ gdzie
- parzystość
- okresowość

Tangensoida

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ gdzie
- $ZW_f = \mathbb{R}$
- $T = \pi$
- $f(x) = 0$ dla $x = k\pi$ gdzie
- asymptoty pionowe $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ gdzie
- nieparzystość
- okresowość

Cotangensoida

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ gdzie
- $ZW_f = \mathbb{R}$

- $T = \pi$
- *f*(*x*) = 0 dla $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ gdzie
- asymptoty pionowe *x* = *k*π gdzie
- nieparzystość
- okresowość

Szkicowanie wykresu funkcji trygonometrycznych

Szkicowanie zaczynamy od narysowania układu współrzędnych i zaznaczenia na osi OY wartości:

- w przypadku sinusa i cosinusa: od -1 do 1,
- w przypadku tagensa i cotangensa od -4 do 4.

Natomiast na osi OX wartości od − π do 3π. Zakładam, że będziesz rysował wykres na kartce w kratkę, więc zalecam byś przyjął jako jednostkę na osi Y 2 kratki. Wykonując podziałkę na osi X nanieś ją w następujący sposób:

- większymi kreskami co kratkę, będą to wartości rosnące co $\frac{\pi}{6}$
- mniejszymi kreskami co półtorej kratki, będą to wartości rosnące co $\frac{\pi}{4}$

Gdy mamy tak przygotowany wykres możemy przystąpić to nanoszenia punktów przez które wiemy, że funkcja będzie na pewno przechodziła (z tabeli), a następnie korzystając z wzorów redukcyjnych możemy je zaznaczyć dla dowolnego kąta.
Tak zaznaczone punkty łączymy płynną linią i gotowe.
!!! Uwaga !!! W przypadku kreślenia wykresu funkcji tangens i cotangens należy zaznaczyć asymptotę linią przerywaną.

Tożsamości trygonometryczne

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$tg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

Dowód prawdziwości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa możemy stwierdzić, że $\frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$ ponieważ

$$a^2 + b^2 = c^2 \Big| \cdot \frac{1}{c^2}$$
$$\frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$
$$\frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$$

Dowód prawdziwości $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$$

Dowód prawdziwości $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a}$$

Dowód prawdziwości $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Pozostałe tożsamości trygonometryczne

Funkcje sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$, jeżeli $\cos\alpha \neq 0 \wedge \cos\beta \neq 0 \wedge \cos(\alpha+\beta)$

$tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$, jeżeli $\cos\alpha \neq 0 \wedge \cos\beta \neq 0 \wedge \cos(\alpha+\beta)$

$ctg(\alpha+\beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$, jeżeli $\sin\alpha \neq 0 \wedge \sin\beta \neq 0 \wedge \sin(\alpha+\beta)$

$ctg(\alpha-\beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha}$, jeżeli $\sin\alpha \neq 0 \wedge \sin\beta \neq 0 \wedge \sin(\alpha+\beta)$

sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

Dla dowolnych kątów o miarach α i β

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

funkcje kąta podwójnego

sin2α = 2sinαcosα

cos2α = $\cos^2$α − $\sin^2$α

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$, jeżeli $\cos\alpha \neq 0 \wedge \cos 2\alpha \neq 0$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$, jeżeli $\sin 2\alpha \neq 0$

Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne – wzory pozwalające sprowadzić obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego do obliczenia wartości funkcji dla kąta ostrego.

sin(− α) = − sin(α) cos(− α) = cos(α) *tg*(− α) = − *tg*(α) *ctg*(− α) = − *ctg*(α)	sin(90 − α) = cos(α) cos(90 − α) = sin(α) *tg*(90 − α) = *ctg*(α) *ctg*(90 − α) = *tg*(α)	sin(90 + α) = cos(α) cos(90 + α) = − sin(α) *tg*(90 + α) = − *ctg*(α) *ctg*(90 + α) = − *tg*(α)
sin(180 − α) = sin(α) cos(180 − α) = − cos(α) *tg*(180 − α) = − *tg*(α) *ctg*(180 − α) = − *ctg*(α)	sin(180 + α) = − sin(α) cos(180 + α) = − cos(α) *tg*(180 + α) = *tg*(α) *ctg*(180 + α) = *ctg*(α)	sin(270 − α) = − cos(α) cos(270 − α) = − sin(α) *tg*(270 − α) = *ctg*(α) *ctg*(270 − α) = *tg*(α)
sin(270 + α) = − cos(α) cos(270 + α) = sin(α) *tg*(270 + α) = − *ctg*(α) *ctg*(270 + α) = − *tg*(α)	sin(360 − α) = − sin(α) cos(360 − α) = cos(α) *tg*(360 − α) = − *tg*(α) *ctg*(360 − α) = − *ctg*(α)	

Na całe szczęście nie trzeba uczyć się powyższej gigantycznej tabeli na pamięć. Wystarczy zapamiętać dwa zdroworozsądkowe fakty wynikających z niej:

- gdy we wzorze redukcyjnym występuje liczba 90 lub 270 to funkcja sinus zmienia się cosinus i na odwrót, a tangens na cotangens i na odwrót
- o pojawieniu się znaku minus decyduje funkcja po lewej stronie gdy w danej ćwiartce dana funkcja jest ujemna to do dopisujemy znak minus np.:
  cos(270 + α) = *sin*(α) – ponieważ cosinus w IV ćwiartce (270 + α) jest dodatni
  cos(90 + α) = − *sin*(α) – ponieważ cosinus w II ćwiartce (90 + α) jest ujemny
  tg(180 − α) = − *tg*(α) – ponieważ tangens w II ćwiartce (180 − α) jest ujemny

Łatwo zapamiętać gdzie pojawia się znak minus używając "praktycznej poezji matematycznej":
W pierwszej ćwiartce wszystkie funkcje są dodatnie
W drugiej tylko sinus
W trzeciej tangens i cotangens
A w czwartej cosinus

Równania trygonometryczne

Równaniem trygonometrycznym będziemy nazywać równanie, w którym niewiadoma występuje tylko w wyrażeniach będących argumentem funkcji trygonometrycznej. Przykładami równań trygonometrycznych mogą być:

- $\sin x = -\frac{1}{2}$
- $\cos^2 x + \sin x = -\frac{1}{2}$
- $tgx = 100$

TWIERDZENIE
Równanie postaci $\sin x = a$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, przy założeniu, że $a \in [-1; 1]$:

- $x = x_0 + 2k\pi$
- lub $x = \pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie i $\sin x_0 = a$

Równanie postaci $\cos x = a$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, przy założeniu, że $a \in [-1; 1]$:

- $x = x_0 + 2k\pi$
- lub $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie i $\cos x_0 = a$

Równanie postaci $tgx = a$ ma nieskończenie wiele rozwiązań:

- $x = x_0 + k\pi$, gdzie i $tgx_0 = a$

Równanie postaci $ctgx = a$ ma nieskończenie wiele rozwiązań:

- $x = x_0 + k\pi$, gdzie i $ctgx_0 = a$

Przykład 1. Rozwiążmy równanie $\sin x = \frac{1}{2}$:

Ponieważ $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, więc $x_0 = \frac{\pi}{6}$

Stąd mamy:

$$x = x_0 + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

lub $x = \pi - x_0 + 2k\pi = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$, gdzie

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby postaci: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, .

Przykład 2. Rozwiążmy równanie $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{4\pi}{3}$$

Zatem:

$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby postaci: $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, .

Przykład 3. Rozwiążmy równanie *tgx* = − 1:

$$tgx = -1 = tg(-\frac{\pi}{4})$$

Zatem:

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby postaci: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, .

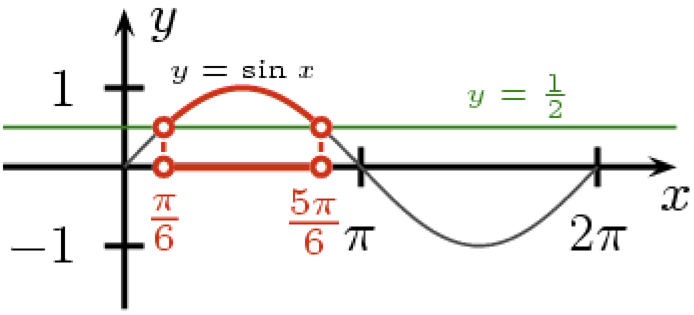
Nierówności trygonometryczne

Przykładami nierówności trygonometrycznych mogą być:

- $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\sin^2 x - \cos x + 2 < 0$
- $tgx + ctgx > 1$

Przykład 1. Rozwiążmy graficznie nierówność: $\sin x > \frac{1}{2}$ w przedziale [0;2π].



Z wykresu możemy odczytać, że sinus przyjmuje wartości większe od $\frac{1}{2}$ dla $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Odp. Nieróność $\sin x > \frac{1}{2}$ w przedziale [0;2π] jest spełniona dla $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Autor: Wikibooks