



Bernhard Riemann

Jak na ironię, Riemann nie wyglądał na człowieka, który mógłby przeprowadzić tak głęboką i daleko idącą rewolucję w matematycznym i fizycznym sposobie myślenia...

Jak na ironię, Riemann nie wyglądał na człowieka, który mógłby przeprowadzić tak głęboką i daleko idącą rewolucję w matematycznym i fizycznym sposobie myślenia...



Nowa geometria narodziła się 10 czerwca 1854 roku. Podczas słynnego wykładu habilitacyjnego na Uniwersytecie w Getyndze w Niemczech Georg Bernhard Riemann przedstawił teorię wyższych wymiarów. Jak otwarcie dusznego, ciemnego pokoju na wspaniałość gorącego letniego słońca, wykład Riemanna objawił światu oszałamiające własności wielowymiarowej przestrzeni.

Jego doniosły i wyjątkowo elegancki esej O hipotezach leżących u podstaw geometrii obalił filary klasycznej geometrii, które przez dwa tysiąclecia skutecznie opierały się wszelkim atakom sceptyków. Stara geometria Euklidesa, w której wszystkie figury

geometryczne są dwu- lub trójwymiarowe, rozpadła się, a z jej ruin wyłoniła się nowa geometria riemannowska. Riemannowska rewolucja miała olbrzymi wpływ na przyszłość sztuki i nauki. W ciągu trzech dziesięcioleci nauczania tej idei „tajemniczy czwarty wymiar” wywierał wpływ na sztukę, filozofię i literaturę w Europie. Po sześćdziesięciu latach od słynnego wykładu Riemanna Einstein użył czterowymiarowej geometrii riemannowskiej do wyjaśnienia powstania Wszechświata i jego ewolucji. 130 lat po odkryciu Riemanna fizycy próbują łączyć wszystkie prawa fizycznego Wszechświata, używając dziesięciowymiarowej geometrii. Sednem pracy Riemanna było uświadomienie sobie, że prawa fizyczne stają się prostsze w wielowymiarowej przestrzeni. Jest to również temat przewodni tej książki.

Jak na ironię, Riemann nie wyglądał na człowieka, który mógłby przeprowadzić tak głęboką i daleko idącą rewolucję w matematycznym i fizycznym sposobie myślenia. Był straszliwie, prawie patologicznie, nieśmiały i cierpiał na powtarzające się załamania nerwowe. Cierpiał również na gruźlicę, która zrujnowała życie tak wielu uczonych, i żył w ubóstwie. Jego osobowość i temperament w żaden sposób nie odpowiadały tej zapierającej dech śmiałości, rozmachowi i wielkiej pewności siebie, typowej dla jego prac.

Riemann urodził się w 1826 roku w Hanowerze w Niemczech jako drugie z sześciorga dzieci ubogiego pastora luterańskiego. Jego ojcu, uczestnikowi wojen napoleońskich, pełniącemu obowiązki wiejskiego pastora, z trudem udawało się wyżywić i odziać liczną rodzinę. Biograf ET. Bell zauważa: „Wątpliwe zdrowie i wczesna śmierć wielu dzieci Riemanna były spowodowane niedożywieniem w młodości, nie zaś brakiem sił witalnych. Jego matka również zmarła, zanim jej dzieci dorosły”.

Już w bardzo młodym wieku Riemann wykazywał swoje słynne cechy: fantastyczną umiejętność liczenia połączoną z łagodnością i wiecznym strachem przed wystąpieniami publicznymi. Ten wyjątkowo nieśmiały chłopiec stał się ofiarą okrutnych żartów szkolnych kolegów, co spowodowało, że skrył się jeszcze bardziej w swoim całkowicie prywatnym świecie matematyki.

Riemann był również bardzo lojalny wobec rodziny. Narażał nieraz swoje słabe zdrowie, aby kupić prezenty dla rodziców, a zwłaszcza dla ukochanych sióstr. Pragnąc zadowolić ojca, rozpoczął studia teologiczne; chciał otrzymać płatną posadę pastora tak szybko, jak to było możliwe, aby poprawić tragiczne finanse rodziny. (Trudno wyobrazić sobie bardziej nieprawdopodobną sytuację niż ta, kiedy małomówny, łagodny chłopiec wygłasza ogniste, pełne pasji kazania, walcząc zaciekle z grzechem i wypędzając diabła).

W szkole średniej intensywnie studiował Biblię, ale jego myśli podążały zawsze ku matematyce. Próbował nawet przeprowadzić matematyczny dowód poprawności Księgi Rodzaju. Szybko się zorientował, że przewyższa wiedzą swoich nauczycieli, którzy nie

byli w stanie dotrzymać mu kroku. W końcu, aby go czymś zająć, dyrektor szkoły podsunął mu trudną książkę. Była to Teoria liczb Adrie-na Marie Legendre'a - wielkie, liczące 859 stron arcydzieło, najbardziej na świecie zaawansowany traktat o trudnej teorii liczb. Riemann pochłonął tę książkę w sześć dni.

Gdy dyrektor zapytał, jak dużo przeczytał, młody Riemann odpowiedział: „To rzeczywiście wspaniała książka. Opanowałem ją całą”. Nie dowierzając tym przechwałkom, parę miesięcy później dyrektor zadał mu kilka skomplikowanych pytań dotyczących tej książki, na które Riemann odpowiedział doskonale.

Zmęczony codzienną walką o środki do życia ojciec Riemanna mógł wymagać, by chłopiec wykonywał niewdzięczne prace domowe. Tymczasem nie dość, że nie obarczał nimi syna, to jeszcze uzbierał wystarczającą ilość pieniędzy, by wysłać swojego dziewiętnastoletniego syna na renomowany Uniwersytet w Getyndze. Tam właśnie Riemann poznał Carla Friedricha Gaussa, „księcia matematyków”, jednego z największych matematyków wszechczasów. Nawet dzisiaj, gdy poprosimy matematyka, aby wymienił trzech najsłynniejszych matematyków, z pewnością pojawią się nazwiska Archimedes, Isaaca Newtona i Carla Gaussa.

Dla Riemanna życie było niekończącą się serią zahamowań i problemów, przewidywanych z największym trudem, z narażeniem wątłego zdrowia. Po każdym triumfie następowała tragedia i klęska. Na przykład w momencie, gdy jego sytuacja zaczęła się poprawiać i rozpoczął regularne studia u Gaussa, wybuchła w Niemczech rewolucja. Klasa pracująca, od dawna żyjąca w nieludzkich warunkach, powstała przeciwko rządowi, a robotnicy w wielu niemieckich miastach sięgnęli po broń. Demonstracje i powstania stały się inspiracją dla dzieł innego Niemca, Karola Marksa, i wywarły głęboki wpływ na ruchy rewolucyjne w całej Europie w ciągu następnych pięćdziesięciu lat.

Gdy całe Niemcy zalała fala zamieszek, studia Riemanna zostały przerwane. Wcielono go do oddziałów studenckich, gdzie miał wątpliwy zaszczyt ochraniać przez szesnaście znojących godzin kogoś bardziej jeszcze przerażonego niż on sam: króla, który drżał ze strachu w pałacu w Berlinie, usiłując ukryć się przed gniewem klasy robotniczej. Potężne wichry rewolucji wiały nie tylko w Niemczech; również w matematyce. Problemem, który przykuwał uwagę Riemanna, był zbliżający się upadek kolejnego autorytetu - geometrii euklidesowej, utrzymującej, że przestrzeń jest nie tylko trójwymiarowa, lecz także „płaska” (jeśli przestrzeń jest płaska, to najkrótsza droga między dwoma punktami jest linią prostą; zupełnie inaczej niż w przypadku, gdy przestrzeń jest zakrzywiona jak na sferze). Elementy Euklidesa były, obok Biblii, chyba najbardziej wpływową księgą wszech czasów. Przez dwa tysiąclecia najbardziej wnikliwe umysły zachodniej cywilizacji podziwiała elegancję i piękno geometrii euklidesowej. Tysiące najznakomitszych katedr w Europie zostało wzniesionych zgodnie z jej zasadami. Patrząc wstecz, można by dojść do wniosku, że odnosiła nawet

zbyt wielkie sukcesy. W ciągu stuleci stała się czymś na kształt religii; ktokolwiek ośmielił się wystąpić z ideą zakrzywionej przestrzeni czy wyższych wymiarów, był traktowany jak szaleniec lub heretyk. Od wielu pokoleń młodzież szkolna zмага się z twierdzeniami geometrii euklidesowej, mówiącymi, że obwód koła jest n razy większy od jego średnicy lub że suma kątów w trójkącie wynosi 180 stopni. Jednak nawet najświetniejsze umysły matematyczne przez kilka stuleci nie mogły udowodnić tych pozornie prostych twierdzeń. Co więcej, europejscy matematycy zaczęli zdawać sobie sprawę, że *Elementy Euklidesa*, cenione od 2300 lat, były niekompletne. Geometria ta obowiązuje wtedy, gdy ograniczymy się do płaskich powierzchni; kiedy jednak wkroczymy w świat powierzchni zakrzywionych, przestaje być poprawna.

Geometria Euklidesa wydawała się Riemannowi szczególnie wyidealizowana w porównaniu z bogactwem i różnorodnością świata. Nigdzie w rzeczywistym świecie nie spotyka się płaskich, idealnych figur geometrycznych. Łańcuchy górskie, fale oceanu, chmury i wiry nie są doskonałymi okręgami, trójkątami czy kwadratami, lecz obiektami, które zaginają się i skręcają na nieskończenie wiele sposobów.

Sytuacja dojrzała do rewolucji, ale kto stanie na jej czele i co zastąpi starą geometrię? Riemann wystąpił przeciwko matematycznej precyzji greckiej geometrii, która została zbudowana, jak odkrył, na ruchomych piaskach zdrowego rozsądku i intuicji, a nie na twardym gruncie logiki.

To oczywiste, mawiał Euklides, że punkt jest bezwymiarowy. Linia ma jeden wymiar: długość. Płaszczyzna ma dwa wymiary: długość i szerokość. Bryłę cechują trzy wymiary: długość, szerokość i wysokość, i w tym miejscu grecki uczony się zatrzymywał. Nie ma obiektów czterowymiarowych. Te poglądy znalazły odzwierciedlenie w filozoficznej myśli Arystotelesa, który pierwszy wyraził zdecydowany pogląd, że czwarty wymiar przestrzenny nie może istnieć. W rozprawie *O niebie* napisał: „Ta spośród wielkości, która rozciąga się w jednym wymiarze, jest linią; ta, która rozciąga się w dwóch wymiarach, jest powierzchnią; ta, która rozciąga się w trzech wymiarach, jest ciałem. Prócz tych nie ma żadnej innej wielkości, bo liczba »trzy« obejmuje wszystko”.* W 150 roku naszej ery astronom Ptolemeusz z Aleksandrii posunął się dalej i przedstawił w swym dziele *O wymiarach* pierwszy prawdziwy „dowód” na to, że czwarty wymiar nie istnieje.

Najpierw, powiedział, narysujmy trzy wzajemnie prostopadłe linie. Na przykład róg sześcianu składa się z trzech wzajemnie prostopadłych linii. Potem, twierdził, spróbujmy narysować czwartą linię, która będzie prostopadła do trzech pozostałych. Bez względu na to, jak bardzo byśmy się starali, nie uda się nam tego zrobić.

Ptolemeusz był przekonany, że czwarta prostopadła linia jest „całkowicie bez rozmiaru i bez definicji”. A zatem czwarty wymiar nie może istnieć.

Tak naprawdę Ptolemeusz dowiódł, że nie potrafimy wyobrazić sobie czwartego wymiaru, wykorzystując nasz trójwymiarowy umysł. (Obecnie znamy wiele ma-

tematycznych obiektów, których nie można sobie wyobrazić, choć ich istnienie można udowodnić). Ptolemeusz przejdzie zatem do historii jako człowiek, który przeciwstawiał się dwóm wielkim ideom w nauce: heliocentrycznemu układowi planetarnemu i czwartemu wymiarowi.

Niektórzy matematycy żyjący po Ptolemeuszu również potępili ideę czwartego wymiaru. W 1685 roku John Wallis polemizował z nią, nazywając ją „potworem mniej prawdopodobnym niż chimery i centaury [...] Długość, szerokość i grubość zajmują całą przestrzeń. Nie można sobie wyobrazić czwartego lokalnego wymiaru oprócz tych trzech”. Przez kilka tysięcy lat matematycy powtarzali ten prosty, ale fatalny błąd, polegający na stwierdzeniu, że czwarty wymiar nie istnieje, ponieważ nie możemy go sobie wyobrazić.

Decydujący przełom dotyczący geometrii euklidesowej nastąpił wówczas, gdy Gauss poprosił Riemanna, aby przygotował referat na temat „podstaw geometrii”. Gauss był żywo zainteresowany tym, czy jego uczeń potrafi stworzyć alternatywę dla geometrii euklidesowej. (Wiele lat wcześniej Gauss wyraził prywatnie poważne zastrzeżenia do geometrii Euklidesa. Rozmawiał nawet z kolegami o hipotetycznych „molach książkowych”, żyjących na dwuwymiarowej powierzchni. Mówił też o rozszerzeniu tej hipotezy na geometrię wielowymiarowej przestrzeni. Jednak jako człowiek o głęboko konserwatywnych poglądach, nigdy nie opublikował żadnej pracy na temat wyższych wymiarów; przewidywał bowiem, że wywołałyby wściekłość wśród przedstawicieli środowiska naukowego, charakteryzujących się ciasnymi poglądami. Określał ich mianem „Beocjan”, od nazwy greckiego plemienia, które miało opinię tępą i niewykształconą).⁴

Riemann był przerażony. Ten łagodny człowiek, obawiający się publicznych wystąpień, został poproszony przez swojego mistrza o przygotowanie dla całego wydziału wykładu na temat najtrudniejszego matematycznego problemu stulecia.

W ciągu następnych kilku miesięcy Riemann z wielkim trudem, nadwerężając zdrowie i ryzykując załamanie nerwowe, rozpoczął tworzenie teorii wyższych wymiarów. Jego siły życiowe jeszcze bardziej osłabły z powodu tragicznej sytuacji finansowej. Aby pomagać rodzinie, był zmuszony udzielać źle płatnych korepetycji. Podejmował też próby rozwiązania problemów fizycznych. Pomagał na przykład profesorowi Wilhelmowi Weberowi przeprowadzać eksperymenty w nowej, fascynującej dziedzinie badań - nauce o elektryczności.

Elektryczność znana była już starożytnym pod postacią błyskawic i iskieł. Dopiero jednak w XIX wieku zjawisko to znalazło się w centrum zainteresowania fizyków, których uwagę przykuło odkrycie, że przesunięcie przewodu z prądem w pobliżu igły kompasu powoduje jej obrót. I odwrotnie, przesunięcie magnesu w pobliżu drutu może

w nim wywołać przepływ prądu elektrycznego. (Prawo to nosi nazwę prawa Faradaya; dzisiaj wszystkie elektryczne i elektroniczne urządzenia - a zatem większość współczesnej technologii - działają dzięki tej zasadzie).

Zjawisko to naprowadziło Riemanna na myśl, że elektryczność i magnetyzm stanowią w jakiś sposób przejaw tej samej siły. Był podekscytowany nowymi odkryciami i przekonany, że może przedstawić matematyczny opis, który zjednoczy oba zjawiska. Zaszły się w laboratorium Webera, wierząc, że nowa matematyka pozwoli na dogłębne zrozumienie tych sił.

Praca nad przygotowaniem dużego publicznego wykładu na temat „podstaw geometrii”, kłopoty materialne oraz konieczność przeprowadzania eksperymentów naukowych sprawiły, że w 1854 roku Riemann podupadł w końcu na zdrowiu i załamał się nerwowo. Później pisał do ojca: „Badania nad zjednoczeniem praw fizyki tak mnie zaabsorbowały, że kiedy otrzymałem temat wykładu, nie potrafiłem oderwać się od nich. Wtedy zachorowałem, częściowo z powodu rozmyślań nad tym, częściowo w wyniku zbyt częstego przebywania w zamkniętych pomieszczeniach w czasie tej okropnej pogody”. Ten list jest znaczący, ponieważ wyraźnie pokazuje, że nawet w czasie kilkumiesięcznej choroby Riemann głęboko wierzył, iż odkryje „jedność wszystkich praw fizyki”; drogę do tej unifikacji miała wskazać matematyka.

Mimo częstych chorób Riemannowi udało się w końcu nadać zadziwiająco nowe znaczenie słowu „siła”. Od czasów Newtona uczeni uważali, że siła to natychmiastowe oddziaływanie pomiędzy dwoma odległymi ciałami. Fizycy nazywali to działaniem na odległość, co znaczyło, że ciało mogło momentalnie wpływać na ruchy innych, odległych ciał. Bez wątplenia mechanika newtonowska potrafiła opisać ruchy planet. Jednak w ciągu stuleci krytycy wielokrotnie zauważali, że działanie na odległość jest nienaturalne, ponieważ oznacza to, że jedno ciało może zmienić kierunek ruchu innego, nawet go nie dotykając.

Riemann stworzył radykalnie nowy obraz fizyczny tego zjawiska. Wyobraził sobie pewien gatunek dwuwymiarowych stworzeń, coś w rodzaju „moli książkowych” Gaussa, żyjących na kartce papieru. Decydującym przełomem, jakiego dokonał, było umieszczenie tych stworzeń na pomarszczonej kartce,⁶ Co stworzenia te pomyślałyby o swoim świecie? Riemann uświadomił sobie, że doszłyby one do wniosku, iż ich świat jest doskonale płaski. Ponieważ ich ciała również byłyby pomarszczone, nigdy nie zauważyłyby, że żyją w zakrzywionym świecie. Riemann stwierdził jednak, że jeśli próbowałyby wędrować w poprzek pomarszczonej kartki, poczułyby tajemniczą, niewidzialną „siłę”, która przeszkadzałaby im w poruszaniu się po linii prostej. Byłyby spychane na lewo i prawo za każdym razem, gdy Ich ciała pokonywałyby zmarszczkę na papierze.

W ten sposób odrzucając zasadę działania na odległość, Riemann po raz pierwszy od 200 lat zerwał z prawami Newtona. Dla Riemanna „siła” była konsekwencją geometrii. Następnie Riemann zastąpił dwuwymiarową kartkę papieru naszym trójwymiarowym Światem, pomarszczonym w czwartym wymiarze. W takiej sytuacji nie byłoby dla nas oczywiste, że Wszechświat jest zakrzywiony. Jednak, gdy spróbowalibyśmy iść po linii prostej, natychmiast zdalibyśmy sobie sprawę z tego, że coś się dzieje. Poruszałibyśmy się jak pijani, jak gdyby niewidzialna siła ciągnęła nas, popychała na prawo i lewo. Riemann doszedł do wniosku, że elektryczność, magnetyzm i grawitacja to wynik pomarszczenia naszego trójwymiarowego Wszechświata w czwartym niewidzialnym wymiarze. Dlatego też „siła” nie żyje własnym niezależnym życiem, lecz jest tylko widocznym efektem zakrzywienia geometrii. Wprowadzając czwarty wymiar przestrzenny, Riemann przypadkowo dotknął tematu, który stał się dominującym zagadnieniem współczesnej fizyki teoretycznej: prawa natury stają się prostsze, jeśli opiszemy je w wielowymiarowej przestrzeni. Jego następnym krokiem było stworzenie języka matematycznego, za pomocą którego można było wyrazić te idee.

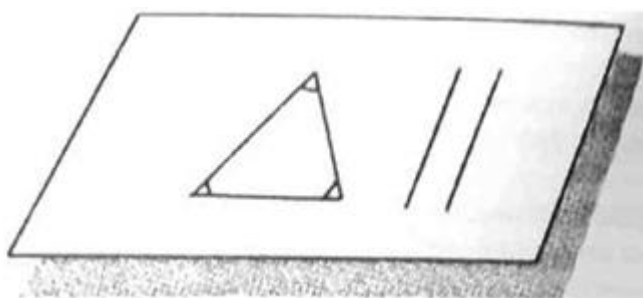
Przez kilka miesięcy Riemann dochodził do siebie po załamaniu nerwowym. W końcu jednak w 1854 roku wygłosił wykład, który spotkał się z entuzjastycznym przyjęciem. Z dzisiejszego punktu widzenia był to bez wątpienia jeden z najważniejszych publicznych wykładów w historii matematyki. W całej Europie rozeszła się wieść o tym, że Riemann zdecydowanie przekroczył granice geometrii euklidesowej, która władała matematyką przez dwa tysiąclecia. Wiadomość o wykładzie dotarła wkrótce do wszystkich ośrodków naukowych Europy, a świat z uznaniem zaakceptował wkład Riemanna do matematyki. Jego praca została przetłumaczona na kilka języków i wywołała dużą sensację w matematyce. Nie było powrotu do dzieł Euklidesa. Podobnie jak w przypadku wielu innych ważnych dzieł w fizyce i matematyce, istota pracy Riemanna jest prosta. Rozpoczął on od słynnego twierdzenia Pitagorasa, jednego z największych odkryć matematycznych starożytnych Greków. Twierdzenie to ustala związek między długościami trzech boków trójkąta prostokątnego. Mówi ono, że suma kwadratów długości krótszych boków jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, przeciwprostokątnej. Innymi słowy jeśli a i b oznaczają długości dwóch krótszych boków, a c długość przeciwprostokątnej, to $a^2 + b^2 = c^2$. (Twierdzenie Pitagorasa leży u podstaw całej architektury, odwołuje się do niego konstruktor każdej budowli na naszej planecie).

Twierdzenie to można prosto uogólnić na trójwymiarową przestrzeń. Mówi ono wtedy, że suma kwadratów długości trzech krawędzi sześcianu, wychodzących ze wspólnego wierzchołka, jest równa kwadratowi długości przekątnej. Tak więc, jeśli a , b i c oznaczają krawędzie sześcianu, a d długość jego przekątnej, wtedy $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

Ryc. 2.1. Długość przekątnej sześcianu jest określona przez trójwymiarową wersję twierdzenia Pitagorasa: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Przez dodanie do tego równania kolejnych wyrazów, można je łatwo uogólnić na przekątną hipersześcianu w N wymiarach. W ten sposób, chociaż nie potrafimy wyobrazić sobie wyższych wymiarów, potrafimy je łatwo przedstawić matematycznie.

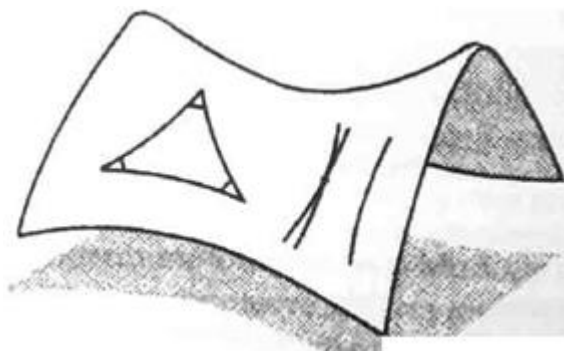
Teraz można łatwo przedstawić to twierdzenie w N wymiarach. Wyobraźmy sobie N -wymiarowy sześcian. Jeśli $a, b, c, \dots$ oznaczają długości krawędzi „hipersześcianu”, a z jest długością jego przekątnej, to $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots = z^2$. Zauważmy, że chociaż nie potrafimy sobie wyobrazić N -wymiarowego sześcianu, z łatwością tworzymy wzór opisujący jego krawędzie. (Własność ta jest dosyć powszechna, gdy zajmujemy się zagadnieniem hiperprzestrzeni. Manipulowanie N -wymiarową przestrzenią w matematyce nie jest wcale trudniejsze od operowania w trójwymiarowej przestrzeni. To zadziwiające, że na zwykłej kartce papieru można za pomocą matematyki opisać własności wielowymiarowych obiektów, których nie potrafimy sobie wyobrazić). Kolejny krok polegał na uogólnieniu tych równań na przestrzenie o dowolnej liczbie wymiarów. Mogą one być zarówno płaskie, jak i zakrzywione. Jeśli są płaskie, obowiązują zwykłe aksjomaty Euklidesa: najkrótsza droga pomiędzy dwoma punktami jest linią prostą, proste równoległe nigdy się nie spotykają, a suma wewnętrznych kątów trójkąta wynosi 180 stopni. Jednak Riemann odkrył, że powierzchnie mogą też mieć „dodatnią krzywiznę”, jak powierzchnia sfery, na której linie równoległe zawsze się przecinają i suma kątów trójkąta może być większa niż 180 stopni. Powierzchnie mogą również mieć „ujemną krzywiznę”, jak...



Krzywizna zerowa



Krzywizna dodatnia



Krzywizna ujemna

...w przypadku powierzchni o kształcie siodła lub trąbki. Na tych powierzchniach suma wewnętrznych kątów trójkąta wynosi mniej niż 180 stopni. Przez punkt leżący poza linią można przeprowadzić nieskończenie wiele linii równoległych

Riemann chciał wprowadzić do matematyki nowe pojęcia, które umożliwiłyby opisanie wszystkich powierzchni, bez względu na to, jak bardzo byłyby skąplikowane.

Prowadziło to nieuchronnie do ponownego zastosowania pojęcia pola, stworzonego przez Faradaya.

Jak pamiętamy, pole Faradaya przypominało pole rolnika zajmujące wycinek dwuwymiarowej przestrzeni, ale rozszerzone na trójwymiarową przestrzeń. Dowolnemu punktowi przestrzeni przypisujemy zbiór liczb, określających w nim wartość siły magnetycznej i elektrycznej. Riemann wpadł na pomysł, by w każdym punkcie przestrzeni wprowadzić zbiór liczb opisujących, jak bardzo jest ona wygięta lub zakrzywiona.

Na przykład na zwykłej dwuwymiarowej powierzchni Riemann przypisał każdemu jej punktowi zbiór trzech liczb całkowicie opisujących jej zakrzywienie. Odkrył też, że do opisanía własności takiej przestrzeni w czterech wymiarach przestrzennych potrzeba w każdym punkcie zbioru dziesięciu liczb. Zbiór ten wystarcza, aby zapisać całą informację o tej przestrzeni, bez względu na to, jak bardzo jest pomarszczona czy zniekształcona. Oznaczmy te liczby symbolami g_{11} , g_{12} , g_{13} ,... (Analizując czterowymiarową przestrzeń, drugi wskaźnik zmieniamy od 1 do 4). Riemannowski zbiór dziesięciu liczb można ułożyć symetrycznie jak na ryc. 2.3. (Na rysunku znajduje się szesnaście składników, lecz $g_{12} = g_{21}$, $g_{13} = g_{31}$ i tak dalej, więc w rzeczywistości jest tylko dziesięć niezależnych elementów). Dzisiaj ten zbiór liczb zwany jest tensorem metrycznym Riemanna. Nie wdając się w szczegóły, można stwierdzić, że im większa wartość elementów tensora metrycznego, tym większe pofałdowanie kartki. Bez względu na to, jak bardzo pomarszczona jest kartka papieru, tensor metryczny pozwala w prosty sposób mierzyć jej krzywiznę w każdym punkcie. Jeśli całkowicie wyprostujemy pokrzywioną kartkę, powrócimy do wzoru Pitagorasa.

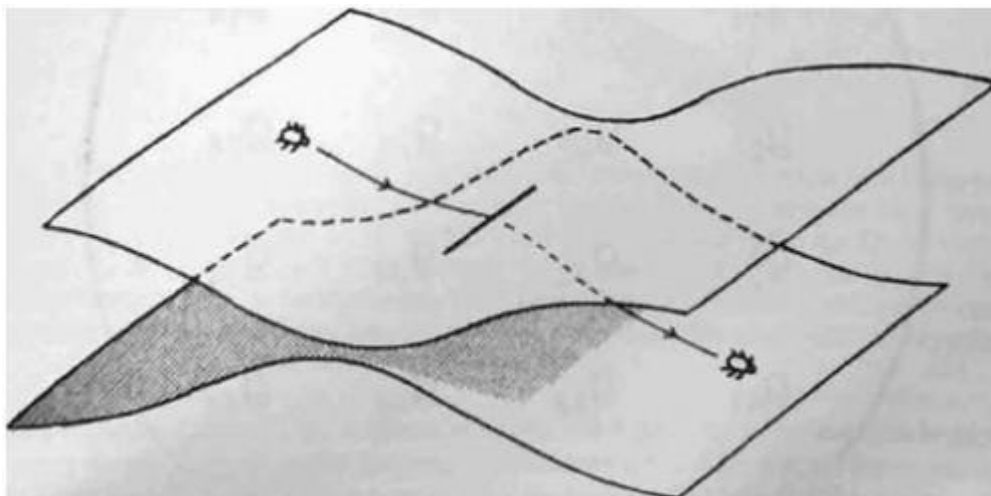
Tensor metryczny pozwolił Riemannowi na stworzenie potężnego narzędzia służącego do opisu przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów i krzywiznie. Ku swoje-

mu zaskoczeniu odkrył, że wszystkie te przestrzenie są dobrze zdefiniowane i niesprzeczne. Przedtem uważano, że badanie zakazanego świata wyższych wymiarów doprowadzi do wielkich sprzeczności. Riemann jednak nie znalazł żadnej. Co więcej, rozszerzenie jego dzieła na N-wymiarową przestrzeń było prawie trywialne. Tensor metryczny przypomina wtedy szachownicę o rozmiarach $N \times N$ kwadratów. Pociąga to za sobą głębokie fizyczne implikacje, o czym się przekonamy, gdy w kolejnych rozdziałach będę omawiał unifikację wszystkich sił natury.

(Jak się okaże, sekret unifikacji leży w rozszerzeniu metryki Riemanna na N-wymiarową przestrzeń, a następnie podzieleniu jej na prostokątne kawałki. Każdy prostokątny wycinek odpowiada innej sile. W ten sposób możemy opisać różne siły natury, umieszczając je w tensorze metrycznym jak kawałki układanki. Jest to przedstawienie w postaci matematycznej zasady, że przestrzeń wielowymiarowa jednoczy prawa natury; że w N-wymiarowej przestrzeni jest „wystarczająco dużo miejsca”, by je zunifikować. Mówiąc dokładniej, metryka Riemanna jest „wystarczająco obszerna”, aby zjednoczyć siły natury).

Riemann przewidział jeszcze inny kierunek rozwoju fizyki. Był jednym z pierwszych, którzy zajmowali się wielokrotnie połączonymi przestrzeniami i tunelami. Aby wyobrazić sobie to pojęcie, weźmy dwie kartki papieru i połóżmy jedną na drugiej. Zróbmy nożyczkami niewielkie rozcięcie w każdej z nich. Potem sklejmy obie kartki wzdłuż nacięć (ryc. 2.4). (Rysunek ten w zasadzie niczym się nie różni od ryc. 1.1, z wyjątkiem tego, że długość tunelu wynosi tym razem zero).

Gdyby jakiś owad żył na górnej kartce, mógłby pewnego dnia przypadkowo wejść w szczelinę i znaleźć się na dolnej kartce. Bardzo by się zdziwił, ponieważ nic nie znajdowałoby się na swoim miejscu. Po wielu eksperymentach odkryłby, że przechodząc przez rozcięcie, może powrócić do znanego mu świata. Kiedy mija szczelinę, świat wygląda normalnie, lecz gdy próbuje pójść na skróty przez nacięcie, wpada w tarapaty.



Cięcia Riemanna to przykład tunelu (tyle tylko, że o zerowej długości) łączącego dwie przestrzenie. Wykorzystał to z sukcesem matematyk Lewis Carroll w książce *Po drugiej stronie lustra*. Cięciem Riemanna, które łączy Anglię z Krainą Czarów, jest lustro. Obecnie cięcia Riemanna przetrwały pod dwoma postaciami. Po pierwsze, trafiają do każdego kursu matematyki wyższej na świecie, gdzie są wykorzystywane w teorii elektrostatyki i przy tworzeniu map konforemnych. Po drugie, można je odnaleźć w epizodach z *The Twilight Zone* (Strefa mroku). (Należy podkreślić, że sam Riemann nigdy nie traktował swoich cięć jako sposobu na podróżowanie między wszechświatami).

Riemann kontynuował swoje prace w dziedzinie fizyki. Ogłosił nawet w 1858 roku, że udało mu się w końcu stworzyć jednolity opis światła i elektryczności. Pisał: *Jestem w pełni przekonany, że moja teoria jest poprawna i że za kilka lat zostanie za taką uznana*". Mimo że tensor metryczny jest potężnym narzędziem służącym do opisu dowolnej zakrzywionej przestrzeni w każdym wymiarze, Riemann nie znał dokładnych równań, spełnianych przez tensor; innymi słowy, nie wiedział, co powodowało, że kartka jest pomarszczona.

Niestety, wysiłki Riemanna, aby rozwiązać ten problem, były nieustannie niweczone przez trapiące go trudności materialne. Sukces nie przyniósł mu pieniędzy. W 1857 roku Riemann doznał kolejnego załamania nerwowego. Po wielu latach zajął w końcu pozycję Gaussa w Getyndze, ale było już za późno. Życie w biedzie zniszczyło mu zdrowie i, jak wielu wspaniałych matematyków wcześniej, zmarł z wycieńczenia w wieku 39 lat, zanim zdążył ukończyć geometryczną teorię grawitacji, elektryczności i magnetyzmu.

W istocie, Riemann nie tylko stworzył fundamenty matematyki hiperprzestrzeni, lecz także przewidział pojawienie się niektórych wielkich zagadnień współczesnej fizyki:

1. Użył wielowymiarowej przestrzeni, by uprościć prawa natury. Dla niego elektryczność, magnetyzm i grawitacja były tylko wynikiem zmarszczenia (zakrzywienia) hiperprzestrzeni.

2. Przewidział pojawienie się pojęcia tuneli. Cięcia Riemanna są najprostszym przykładem przestrzeni wielokrotnie połączonych.

3. Opisał grawitację jako pole. Tensor metryczny, określający siłę grawitacji (po przez zakrzywienie) w każdym punkcie przestrzeni, dokładnie odpowiada pojęciu pola Faradaya, zastosowanego do grawitacji.

Riemann nie mógł ukończyć swojej pracy dotyczącej pól sił, ponieważ nie znał równań pola dla elektryczności, magnetyzmu i grawitacji. Innymi słowy, nie wiedział dokładnie, jak Wszechświat musiałby być zakrzywiony, aby otrzymać siłę grawitacji. Próbował znaleźć równania pola dla elektryczności i magnetyzmu, ale zmarł, zanim mu się to udało. U schyłku życia ciągle jeszcze nie potrafił obliczyć, jakie zakrzywienie jest

konieczne, aby opisać te siły. Te kluczowe zagadnienia podejmą później Maxwell i Einstein.

Uwaga: Tekst pochodzi z książki "Hiperprzestrzeń" autorstwa Michio Kaku.

Autor: Michio Kaku